数理解析研究所講究録
第 1596 巻 2008 年 119-126

ユニタリ不変ノルムとCPR幾何

CPR geometry for unitarily invariant norms

大阪教育大学・教養学科・情報科学　藤井　淳一 (Jun Ichi Fujii)
Departments of Arts and Sciences (Information Science)
Osaka Kyoiku University

はじめに

Hilbert 空間上の可逆正作用素全体の幾何学については、90 年代に Corach-Porta-Recht[4, 5, 1] らが研究し、作用素ノルムについて Finsler 計量を導入した。一方、Bhatia[2] らは、行列の 2-ノルムについて、同様の計量が Riemann 計量となることを示した。[2] においては、一般のユニタリ不変ノルムについての考察はなかったが、その後出版されたテキスト [3] には、同様にできる旨を、証明なしに触れてあった。ここでは、それを確かめると共に、[6] に基づく方法でこの幾何学を再構成し、ユニタリ不変ノルムで Finsler 計量が導入できることを示す。この幾何学では測地線が最短であることは結果としてわかるが、不等式として別証明を与えて確かめることにする。

1. 幾何学的考察

F.Klein は flat な幾何学的対象について、上部構造としての変換群に目を向けた。あまりなじみはないが、点集合としてのアフィン空間は flat な存在で、その上部構造として接ベクトル空間はただひとつに決まるので、接ベクトルは違った点を自由に移動できる。さらにその上部構造としての変換群が一般線形群、あるいは少し絞って、直交群（ユニタリ群）になる。この視点を（flat でない）多様体に転じると E.Cartan の発想となって、接空間はひとつに定まらないのでまとめて「接束」となり、一般線形群はその上のファイバーとして、全体は接枠束としてのファイバー束にまとめられ、直交群はその構造群として位置づけられる。異なった点の接ベクトルは、互いに違う空間にあるために自由に行き来できず微分すらできないが、接枠束において「(線形) 接続」が導入されることで関係付けられ、「平行移動」を介す

ることで「共変微分」が与えられる。接続は接枠の中で水平性を異ファイバー間とcompatibleな関係を保って定められたもので、下部の多様体や接空間の幾何学的対象は、接束に「(水平) 持ち上げ」されて関係付けられるのである。この方向で解釈されたのが、CPR幾何である。

ユニタリ不変ノルムのケースも一括して述べるので、$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}_n$ を n 次の正定値行列全体が作る多様体とする。このとき、純幾何学的には、$\mathcal{M}_n, \mathcal{H}_n, \mathcal{G}_n$ を、それぞれ n 次の行列全体、エルミット行列全体、正則行列全体とすると、$\mathcal{H}_n$ は、$\mathcal{P}^+$ の接空間 (さらには**接束**) とみなせる。さらに、$A \in \mathcal{P}^+$ を固定したとき、$G \in \mathcal{G}$ について、**射影** $\pi_A(G) = GAG^*$、$\mathcal{P}^+$ への作用 $L_G A = GAG^*$ を決めると、$\mathcal{G}_n$ は (それ自身の接空間 $\mathcal{M}_n$ をもつ) $\mathcal{P}^+$ の主束となる。このときの**構造群**は、$\mathcal{U}_A = \{U \in \mathcal{G} \mid UAU^* = A\}$ であるが、実際には、**等質空間**となるので、$A = I$ とみなして差し支えなく、構造群はユニタリ行列全体 $\mathcal{U}_n$ でよい。すると、$G \in \mathcal{G}_n$ における**水平部分空間**は、接空間がエルミットなので

$$H_G = \{GX \mid X \in \mathcal{H}_n\}$$

(対する垂直部分空間 V_G は歪エルミットに対応：$H_G = \{GX \mid X^* = -X\}$)

として自然な接続が定義される。曲線 γ の水平持ち上げ Γ については、

$$\textbf{transport equation:} \qquad \dot{\Gamma} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\gamma^{-1}\Gamma$$

で与えられる。実際、「持ち上げ」として $\gamma = \pi_I(\Gamma) = \Gamma\Gamma^*$ が必要で、微分すれば $\dot{\gamma} = \dot{\Gamma}\Gamma^* + \Gamma\dot{\Gamma}^*$ となり、$\Gamma(t)$ での接ベクトル $\dot{\Gamma}$ の水平条件は左から $\Gamma(t)$ で割り算をしたものがエルミット；$\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = (\Gamma^{-1}\dot{\Gamma})^* = \dot{\Gamma}^*(\Gamma^*)^{-1}$、すなわち、$\dot{\Gamma}\Gamma^* = \Gamma\dot{\Gamma}^*$ であるから、

$$\dot{\gamma}\gamma^{-1}\Gamma = \left(\dot{\Gamma}\Gamma^* + \Gamma\dot{\Gamma}^*\right)(\Gamma^*)^{-1} = \dot{\Gamma} + \Gamma\dot{\Gamma}^*(\Gamma^*)^{-1} = \dot{\Gamma} + \dot{\Gamma}\Gamma^*(\Gamma^*)^{-1} = 2\dot{\Gamma}$$

となって、transport equation が得られる。

このとき、曲線 γ に沿った 0 から t への平行移動 P_t が、γ の水平持ち上げ Γ について

$$P_t X = \Gamma(t)\Gamma(0)^{-1}X(\Gamma(0)^*)^{-1}\Gamma(t)^*$$

によって与えられる。このとき、曲線 γ に沿うベクトル場 X に対する**共変微分** $D_t X$ は、$t+\varepsilon$ から逆向きに t に向かう平行移動を考えて、

$$
\begin{aligned}
D_t X &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\Gamma(t)\Gamma(t+\varepsilon)^{-1}X(t+\varepsilon)(\Gamma(t+\varepsilon)^*)^{-1}\Gamma(t)^* - X(t)\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\Gamma(t)\Gamma(t+\varepsilon)^{-1}\big(X(t+\varepsilon)-X(t)\big)(\Gamma(t+\varepsilon)^*)^{-1}\Gamma(t)^*\\
&\qquad + \Gamma(t)\big(\Gamma(t+\varepsilon)^{-1}-\Gamma(t)^{-1}\big)X(t)(\Gamma(t+\varepsilon)^*)^{-1}\Gamma(t)^*\\
&\qquad\quad + X(t)\big((\Gamma(t+\varepsilon)^*)^{-1}-(\Gamma(t)^*)^{-1}\big)\Gamma(t)^*\Big)\\
&= \dot{X}(t) - \Big(\dot{\Gamma}\Gamma^{-1}X + X(\Gamma^*)^{-1}\dot{\Gamma}^*\Big)(t) \qquad \because\ \dot{\overline{\Gamma^{-1}}} = -\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}\Gamma^{-1}\\
&= \dot{X} - \frac{1}{2}(\dot{\gamma}\gamma^{-1}X + X\gamma^{-1}\dot{\gamma}) \qquad \because\ \dot{\Gamma}\Gamma^{-1} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}\gamma^{-1},\ \dot{\gamma}=\dot{\gamma}^*
\end{aligned}
$$

で与えられる。さらに自己平行曲線として測地線が、

測地線方程式: $$0 = D_t\dot{\gamma} = \ddot{\gamma} - \dot{\gamma}\gamma^{-1}\dot{\gamma}$$

によって定義される。このとき、$\gamma(0)=A,\ \gamma(1)=B$ となる測地線は、

$$\gamma(t) = A\#_t B \equiv A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t A^{1/2}$$

という、久保-安藤 [9] の意味での**幾何作用素平均**となることが示されている [4]。実際、$f(t) = \gamma(0)^{-1/2}\gamma(t)\gamma(0)^{-1/2}$ と正規化しても、

$$f(0) = I, \quad f'' = f'f^{-1}f', \quad f''f^{-1} = (f'f^{-1})^2$$

となって、測地線方程式を満たし、

$$(f'f^{-1})' = f''f^{-1} + f'(f^{-1})' = (f'f^{-1})^2 - (f'f^{-1})^2 = 0$$

とパラメータ t によらずに 0 となるので、$f'f^{-1} = C$ となる作用素 C が採れる。$C = f'(0)f(0)^{-1} = f'(0)$ であるから、実際は $C = C^*$ である。上記の関係より、「$f(t)$、$f'(t)$、C はすべての $t\in[0,1]$ で可換」となり、通常の対数微分同様

$$(\log f)' = f'f^{-1} = C \qquad となるので \qquad \exists D;\ \log f(t) = tC + D.$$

ここで、$t=0$、$D=0$ より、$f(t) = e^{tC}$, i.e., $\gamma(t) = \gamma(0)^{1/2}e^{tC}\gamma(0)^{1/2}$ となって、$A=\gamma(0)$ と $B=\gamma(1) = A^{1/2}e^C A^{1/2}$ より $e^C = A^{-1/2}BA^{-1/2}$ であるから

$$\gamma(t) = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t A^{1/2} = A\#_t B$$

と、幾何作用素平均に至る。

2. 計量から距離へ

CPR 幾何では、さらに、各点 $A \in \mathcal{P}^+$ での接ベクトルの計量を

$$L(X; A) = \|X\|_A = \|A^{-1/2}XA^{-1/2}\|$$

と決めると **Finsler 計量**, すなわち、計量自身が元のノルムと同等で、計量が平行移動不変なもの：

$$\|P_t X\|_{\gamma(t)} = \|\Gamma(t)\Gamma(0)^{-1}X(\Gamma(0)^*)^{-1}\Gamma(t)^*\|_{\gamma(t)} = \|X\|_{\gamma(0)},$$

となることがわかり、測地線は、曲線の長さ

$$\ell(\gamma) \equiv \int_0^1 L(\gamma'; \gamma)dt = \int_0^1 \|\gamma(t)^{-1/2}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1/2}\|dt$$

の最小値

$$\|\log A^{-1/2}BA^{-1/2}\| = \|\log B^{-1/2}AB^{-1/2}\|$$

を与える（これは、**Thompson (part) metric** と呼ばれ、2 点間の距離を与えている [10, 4]）。

これらについて、ユニタリ不変ノルム $|||\ |||$ においてもこの議論が成り立つことを示す：

Theorem 1. ユニタリ不変ノルム $|||\ |||$ による計量 $L_{|||\ |||}$ を

$$L_{|||\ |||}(X; A) = |||X|||_A = |||A^{-1/2}XA^{-1/2}|||$$

で与えても、Finsler 計量となる。

（証明） $U = \gamma(t)^{-1/2}\Gamma(t)\Gamma(0)^{-1}\gamma(0)^{1/2}$ とおくと、持ち上げ $\gamma = \Gamma\Gamma^*$ の性質から

$$\begin{aligned} UU^* &= \gamma(t)^{-1/2}\Gamma(t)\Gamma(0)^{-1}\gamma(0)^{1/2}\gamma(0)^{1/2}(\Gamma(0)^*)^{-1}\Gamma(t)^*\gamma(t)^{-1/2} \\ &= \gamma(t)^{-1/2}\Gamma(t)\Gamma(0)^{-1}(\Gamma(0)\Gamma(0)^*)(\Gamma(0)^*)^{-1}\Gamma(t)^*\gamma(0)^{-1/2} \\ &= \gamma(t)^{-1/2}\Gamma(t)\Gamma(t)^*\gamma(0)^{-1/2} = \gamma(t)^{-1/2}\gamma(t)\gamma(0)^{-1/2} = I \end{aligned}$$

より、U は、ユニタリとなり、

$$|||P_t X|||_{\gamma(t)} = |||U\gamma(0)^{-1/2}X\gamma(0)^{-1/2}U^*||| = |||\gamma(0)^{-1/2}X\gamma(0)^{-1/2}|||. \qquad \square$$

したがって、$d_{|||\ |||}(A, B) = \int_0^1 \left|\left|\left|(A\#_t B)^{-1/2}\left(\frac{d}{dt}A\#_t B\right)(A\#_t B)^{-1/2}\right|\right|\right| dt$, すなわち、測地線が最短の距離を与えることは、Finsler 空間の性質より知られているので、実

際に距離を求めることもできるが、ここでは、不等式に焦点を当てて、最短であることも直接示してみよう。A, B を結ぶ微分可能な path γ 全体 $P(A, B)$ に対して、

$$d_{|||\ |||}(A,B) = \inf\left\{ L_{|||\ |||}(\gamma) \;\middle|\; \gamma \in P(A,B) \right\}$$

であるが、次のことを示してみよう：

Theorem 2. $d_{|||\ |||}(A,B) = \left|\left|\left| \log(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) \right|\right|\right| \geqq |||\log B - \log A|||.$

これを示すために、path $\gamma(t)$:path について、 $H(t) = \log \gamma(t)$ とおいたときに次の公式が成り立つことを示す:

Proposition 1. $\dfrac{d\gamma}{dt}(t) = \dfrac{d}{dt}e^{H(t)} = \displaystyle\int_0^1 e^{uH(t)}H'(t)e^{(1-u)H(t)}du$

(証明) 微分すると、

$$-\frac{d}{du}e^{uH(t)}e^{(1-u)H(t+\varepsilon)} = e^{uH(t)}\big(H(t+\varepsilon) - H(t)\big)e^{(1-u)H(t+\varepsilon)}$$

が得られるので

$$\int_0^1 e^{uH(t)}\big(H(t+\varepsilon) - H(t)\big)e^{(1-u)H(t+\varepsilon)}du = -\left[e^{uH(t)}e^{(1-u)H(t+\varepsilon)}\right]_0^1 = e^{H(t+\varepsilon)} - e^{H(t)}$$

となって、ε で両辺を割って極限を取れば得られる。 □

(Theorem 2 の不等式の証明) Hiai-Kosaki[8] の対数-幾何平均不等式

$$\left|\left|\left| \int_0^1 H^tXK^{1-t}dt \right|\right|\right| \geqq |||H^{1/2}XK^{1/2}|||$$

を使うと、Proposition 1 より、

$$\begin{aligned}
|||\gamma(t)^{-1/2}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1/2}||| &= \left|\left|\left| e^{-H(t)/2}\left(\int_0^1 e^{uH(t)}H'(t)e^{(1-u)H(t)}du\right)e^{-H(t)/2} \right|\right|\right| \\
&= \left|\left|\left| \int_0^1 \left(e^{H(t)}\right)^u e^{-H(t)/2}H'(t)e^{-H(t)/2}\left(e^{H(t)}\right)^{1-u}du \right|\right|\right| \\
&\geqq \left|\left|\left| \left(e^{H(t)}\right)^{1/2} e^{-H(t)/2}H'(t)e^{-H(t)/2}\left(e^{H(t)}\right)^{1/2} \right|\right|\right| \\
&= |||e^{H(t)/2}e^{-H(t)/2}H'(t)e^{-H(t)/2}e^{H(t)/2}||| = |||H'(t)|||
\end{aligned}$$

となるので、

$$\ell(\gamma) \geqq \int_0^1 |||H'(t)|||dt \geqq \left|\left|\left| \int_0^1 H'(t)dt \right|\right|\right| = |||\log B - \log A|||.$$

□

さらに、次の性質を示しておく：

Proposition 2. 可逆な X について、 $d_{|||\,|||}(A,B) = d_{|||\,|||}(X^*AX, X^*BX)$.

(証明) まず、ノルムの関係については、

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|\left|(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}(X^*\gamma(t)X)'(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}\right|\right|\right| \\
&\qquad = \left|\left|\left|\,|(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}X^*\gamma'(t)X(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}|\,\right|\right|\right| \\
&\qquad = \left|\left|\left|\sqrt{(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}X^*\gamma'(t)X(X^*\gamma(t)X)^{-1}X^*\gamma'(t)X(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}}\right|\right|\right| \\
&\qquad = \left|\left|\left|\sqrt{(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}X^*\gamma'(t)\gamma(t)^{-1}\{\gamma'(t)X}(X^*\gamma(t)X)^{-1/2}\right|\right|\right| \\
&\qquad = \left|\left|\left|\sqrt{\gamma(t)^{-1/2}\gamma'(t)X(X^*\gamma(t)X)^{-1}X^*\gamma'(t)\gamma(t)^{-1/2}}\right|\right|\right| \\
&\qquad = \left|\left|\left|\sqrt{\gamma(t)^{-1/2}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1/2}}\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\gamma(t)^{-1/2}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1/2}\right|\right|\right|.
\end{aligned}
$$

となっている。さらに、$X^*P(A,B)X = P(X^*AX, X^*BX)$ より、inf をとった値でも等しいので、距離の値も一致している。 □

この、いわば、homegeneity より、path の最小値については可換な議論に reduce できることがわかる。

(Theorem 2 の等式の証明) $C = A^{-1/2}BA^{-1/2}$, $\Gamma(t) = C^t$ とおくと、

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 |||C^{-t/2}(C^t \log C)C^{-t/2}|||dt = |||\log C||| : \text{最小}$$

となるので、

$$\gamma(t) = A^{1/2}\Gamma(t)A^{1/2} = A^{1/2}C^tA^{1/2} = A\#_tB.$$

であることから、

$$d(A,B) = d(I,C) = |||\log C||| = |||\log A^{-1/2}BA^{-1/2}|||. \qquad \square$$

3. 距離の性質

以上のように得られた「最短距離」は、その定義から距離の公理を満たすことは明らかである。作用素ノルムでの Thompson metric としての性質は、

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &\equiv \inf_{\gamma} \ell(\gamma) = \ell(A\#_tB) = \|\log(A^{-1/2}BA^{-1/2})\| = d(A^{-1}, B^{-1}) \\
&= d(X^*AX, X^*BX) \quad (\exists X^{-1}) \\
&= \log\left(\max\{\|A^{-1/2}BA^{-1/2}\|,\ \|B^{-1/2}AB^{-1/2}\|\}\right) \\
&= \log\left(\max\{r(A^{-1}B),\ r(B^{-1}A)\}\right) \\
&= \log\max\left\{t_0, s_0 \,\middle|\, t_0 = \inf\{t|A \le tB\},\ s_0 = \inf\{s|B \le sA\}\right\}
\end{aligned}
$$

などが知られているが、最初3行は、ユニタリ不変ノルムでも成り立つ性質である。他にもこの距離$d_{|||\ |||}$によって、$\mathcal{P}^+$が完備距離空間になることなどが確かめられる。実際、確認してみる：

$\{A_n\} \subset \mathcal{P}^+$を基本列とする。ここでユニタリ不変ノルムは、便宜上、**normalized**であること仮定しておく:

$$\|A\| \leqq |||A||| \leqq \|A\|_1.$$

すると、基本列の有界性より、

$$\|\log A_n\| \leqq |||\log A_n||| = d(I, A_n) \leqq \exists M$$

すなわち

$$0 < e^{-M} \leq A_n \leq e^M$$

であることがわかる。これによって、収束先の可逆性は保証される。$\varepsilon > 0$について、

$$\varepsilon' = \min\{\log(1+\varepsilon e^{-M}), -\log(1-\varepsilon e^{-M})\}$$

とおけば、

$$\exists N;\ n,m \geqq N \implies |||\log A_n^{-1/2} A_m A_n^{-1/2}||| < \varepsilon'$$

となって

$$e^{-\varepsilon'} A_n \leq A_m \leq e^{\varepsilon'} A_n$$

すなわち

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leqq e^M(e^{-\varepsilon'} - 1) \leq (e^{-\varepsilon'} - 1)A_n \\ &\leq A_m - A_n \leq (e^{\varepsilon'} - 1)A_n \leq (e^{\varepsilon'} - 1)e^M \leqq \varepsilon \end{aligned}$$

となり、通常の基本列となるので、収束する。

参考文献

[1] E.Andruchow, G.Corach and D.Stojanoff: Geometrical significance of Lowner-Heinz inequality, Proc. Amer. Math. Soc., **128**(2000), 1031–1037.

[2] R.Bhatia and J.Holbrook: Riemannian geometry and matrix geometric means, Linear Alg. Appl., **413**(2006), 594–618.

[3] R.Bhatia: "Positive Definite Matrices", Princeton Univ.Press, 2007.

[4] G.Corach, H.Porta and L.Recht: Geodesics and operator means in the space of positive operators. Internat. J. Math. **4**(1993), no. 2, 193–202.

[5] G.Corach, H.Porta and L.Recht: Convexity of the geodesic distance on spaces of positive operators, Illinois J. Math., **38**(1994), 87–94.

[6] G.Corach and A.L.Maestripieri: Differential and metrical structure of positive operators, Positivity, **3**(1999), 297–315.
`http://www.iam.conicet.gov.ar/PUBINV-DVI-PDF/MAESTRIPIERI/CM6.pdf`

[7] J.I.Fujii, M.Fujii, M.Nakamura, J.Pečarić and Y.Seo: A reverse inequality for the weighted geometric mean due to Lawson-Lim, to appear in Linear Alg. Appl..

[8] F.Hiai and H.Kosaki: *Comparison of various means of operators*, J.Funt.Anal., **163**(1999), 300-323.

[9] F.Kubo and T.Ando: Means of positive linear operators, Math. Ann., **246**(1980), 205–224.

[10] A.C.Thompson: On certain contraction mappings in a partially ordered vector space, Proc. Amer. Mat. Soc., **14**(1963), 438–443.

E-mail address: `fujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp`